Integralrechnung

Schwierige Integration

Aufgabensammlung

Höheres Niveau

Text 48060

Stand 25. Mai .2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Übersicht: Texte zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Höheres Niveau (Studium)

Inhalt:

Hinweis: PBZ = Partialbruchzerlegung, PD = Polynomdivision ,
RF = Reduktionsformel oder umgekehrte partielle Integration

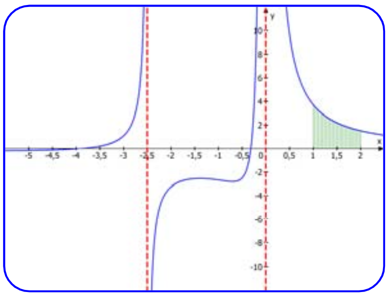
	Aufgabe	Ergebnis	Methode
10.	$\int_1^2 \frac{4x^2+17x+5}{2x^3+5x^2}dx$	$=\ln\frac{56}{9}-\frac{1}{2}$	PBZ
11.	$-\int_2^4 \frac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}dx$	$=4\cdot\left[-\ln 2+1+\frac{1}{2}\ln\frac{7}{2}-\sqrt{7}\cdot\left(\arctan\sqrt{7}-\arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right]\approx 0{,}0914$	PBZ
12.	$A(r)=\int_2^r \frac{x^2}{x^3-x^2-x+1}dx$	$=\ln(r-1)-\frac{1}{2(r-1)}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\ln 3$	PBZ
13.	$\int \frac{x^3-x^2+3}{x^4-x^3-6x^2}dx$	$=\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}\cdot\ln\lvert x\rvert+\frac{9}{20}\cdot\ln\lvert x+2\rvert+\frac{7}{15}\cdot\ln\lvert x-3\rvert+C$	PBZ
14.	$\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}dx$	$=4x+\frac{2}{3}\cdot\ln\lvert x-1\rvert+2\cdot\ln\lvert x+1\rvert-\frac{32}{3}\cdot\ln\lvert x+2\rvert+C$	PD, PBZ
15.	$\int \frac{x^4+3x^2-x+4}{x^4+2x^2+1}dx$	$=x+\frac{2x+1}{2x^2+2}+2\arctan(x)+C$	PBZ, RF
16.	$\int \frac{x^4+x^3-3x^2+7x}{x^3-3x+2}dx$	$=\frac{1}{2}x^2+x+2\cdot\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-2}\right\rvert-\frac{2}{x-2}+C$	PD, PBZ
17.	$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3+x^2}dx$	$=\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left\lvert x^2-x+1\right\rvert+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$	PBZ
18.	$\int \frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^2+5x+6}dx$	$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln\lvert x+2\rvert+2\cdot\ln\lvert x+3\rvert+C$	PD, PBZ
19.	$\int \frac{x^2+3}{(x+1)^2\left(x^2+3x+4\right)}dx$	$=-2\cdot\ln\lvert x+1\rvert-\frac{2}{x+1}+\ln\left(x^2+3x+4\right)+C$	PBZ
20.	$\int \frac{x^2-4x+1}{(x+1)(x+2)^2\left(x^2+9\right)}dx$	$=\frac{3}{5}\cdot\ln\lvert x+1\rvert-\frac{9}{13}\cdot\ln\lvert x+2\rvert+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{65}\cdot\ln\left(x^2+9\right)+\frac{14}{195}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$	PBZ
21.	$\int_0^2 \frac{3x^2+13x+30}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)}dx$	$=3\cdot\ln 3+\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\cdot\ln 2+\frac{\pi}{4}$	PBZ
22.	$\int \frac{2x^3-x^2+x-2}{x^4+x^2}dx$	$\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\arctan(x)+C$	PBZ

23. $\int\limits_2^3 \frac{4x^3-11x^2+11x-14}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}dx$ $\quad ... = \ln 2 - 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{13}{8} - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$ PBZ

24. $\int\limits_1^3 \frac{x^2-3x+10}{x^2\cdot\left(2x^2+x+5\right)}dx$ $\quad = \ln(3) + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{13}{4} - \frac{10}{\sqrt{39}}\cdot\left[\arctan\left(\frac{13}{\sqrt{39}}\right) - \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right)\right]$ PBZ

25. $\int \frac{x^2}{x^4-6x^2+25}dx$ $\quad = \frac{1}{16}\cdot\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2+4x+5}\right| + \frac{1}{4}\cdot\arctan(x-2) + \frac{1}{4}\cdot\arctan\left(x+2\right) + C$ PBZ

Aufgabe 10 $\int_1^2 \frac{4x^2+17x+5}{2x^3+5x^2}dx$



Faktorisierung des Nenners: $N = x^2(2x+5)$

Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\frac{4x^2+17x+5}{x^2\cdot(2x+5)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{2x+5} \quad | \cdot x^2(2x+5)$

$4x^2+17x+5 = ax(2x+5)+b(2x+5)+cx^2$ (*)

Bestimmung von a, b und c

1. mit dem Einsetzungsverfahren:

$x=0$ führt zu $5=5b \Rightarrow \boxed{b=1}$

$x=-2,5$ führt zu $-12,5 = 6,25\,c \Rightarrow \boxed{c=-2}$

$x=-2$ führt zu $-13=-2a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 4 \Rightarrow 2a = 13+b+4c = 13+1-8 = 6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

2. mit Koeffizientenvergleich:

Aus (*) folgt: $4x^2+17x+5 = 2ax^2+5ax+2bx+5b+cx^2$

$4x^2+17x+5 = (2a+c)x^2+(5a+2b)x+5b$

Koeffizienten von x^2: $2a+c=4$ (1)

Koeffizienten von x: $5a+2b=17$ (2)

Absolutglieder: $5b=5 \Rightarrow \boxed{b=1}$

b in (2): $5a+2=17 \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow \boxed{a=3}$

a in (1): $6+c=4 \Rightarrow \boxed{c=-2}$

Ergebnis: $\frac{4x^2+17x+5}{x^2\cdot(2x+5)} = \frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{2x+5}$

Integration: $\int_1^2 \frac{4x^2+17x+5}{2x^3+5x^2}dx = \int_1^2 \frac{3}{x}dx + \int_1^2 x^{-2}dx - \int_1^2 \frac{2}{2x+5}dx = \left[3\cdot\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|2x+5|\right]_1^2$

$.... = \left[3\cdot\ln 2 - \tfrac{1}{2} - \ln 9\right] - \left[3\cdot\ln 1 - 1 - \ln 7\right] = 3\cdot\ln 2 - \ln 9 + \ln 7 - \tfrac{1}{2}$

Man könnte noch die Logarithmen zusammenfassen:

$.... = \ln\frac{2^3\cdot 7}{9} - \frac{1}{2} = \ln\tfrac{56}{9} - \tfrac{1}{2}$

Hinweis: $2\cdot\int\frac{1}{2x+5}dx = 2\cdot\frac{\ln|2x+5|}{2} = \ln|2x+5|$

oder mit Substitution $u = 2x+5 \Rightarrow du = 2\cdot dx$

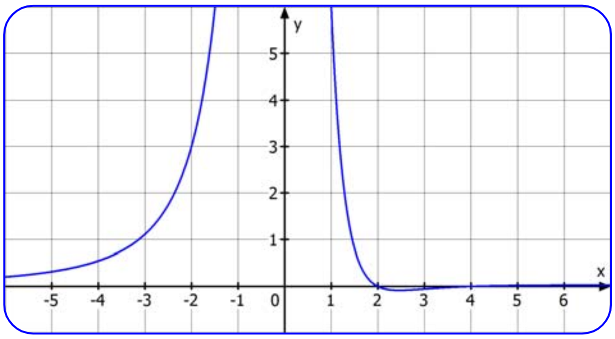
$\int\frac{2\cdot dx}{2x+5} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|2x+5|$

Aufgabe 11 (Extrem schwer)

Gegeben ist f durch $f(x)=\dfrac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}$

a) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen K von f mit der x-Achse und seine Asymptoten.

b) K und die x-Achse begrenzen im 4. Feld eine Fläche. Berechne ihren Inhalt A.



Lösung:

a) Vorarbeit: Zähler = 0: $4x^2-24x+32=0 \quad |:4$

$x^2-6x+8=0$

$x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}4\\2\end{cases}$

Nenner = 0: $x^2\left(x^2-x+2\right)=0$

1. Faktor = 0: liefert $x_3=0$ doppelt.

2. Faktor = 0: liefert $x_{4,5}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}\notin\mathbb{R}$

Die Funktion hals also die Nullstellen 3 und 4 sowie die Polstelle 0 ohne Vorzeichenwechsel. Das Schaubild K schneidet also die x-Achse in $N_1(2\,|\,0)$ und $N_2(4\,|\,0)$.

K hat die senkrechte Asymptote $x=0$. Weil der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners, ist die x-Achse waagrechte Asymptote für $|x|\to\infty$. Oder so:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{24}{x^3}+\frac{32}{x^4}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$ (Es wurde durch x^4 gekürzt.)

b) Flächenberechnung:

$$A=-\int_2^4\frac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}dx=-4\int_2^4\frac{x^2-6x+8}{x^2\left(x^2-x+2\right)}dx$$

Das Minuszeichen wird benötigt, weil die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz: $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2\left(x^2-x+2\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{cx+d}{x^2-x+2} \quad |\cdot x^2\left(x^2-x+2\right)$

$$x^2-6x+8=ax\cdot\left(x^2-x+2\right)+b\cdot\left(x^2-x+2\right)+(cx+d)\cdot x^2 \qquad (*)$$

Bestimmung von a, b, c und d

(1) mit dem Einsetzungsverfahren:

x = 0 liefert: $8=2b \Rightarrow \boxed{b=4}$

x = 1 liefert: $3=2a+2b+c+d \Rightarrow 2a+c+d=-5$ (1)

x = 2 liefert: $0=8a+4b+8c+4d \Rightarrow 8a+8c+4d=-16 \Leftrightarrow 2a+2c+d=-4$ (2)

x = -1 liefert: $15=-4a+4b-c+d \Rightarrow -4a-c+d=-1$ (3)

(2) – (1): $\boxed{c=1}$

c in (1): $2a+d=-6$ (4)

c in (3): $-4a+d=0$ (5)

(4) – (5): $6a=-6 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

a in (5): $4+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-4}$.

(2) mit Koeffizientenvergleich:

Aus $x^2-6x+8=ax\cdot\left(x^2-x+2\right)+b\cdot\left(x^2-x+2\right)+(cx+d)\cdot x^2$ (*)

folgt: $x^2-6x+8=(a+c)x^3+(-a+b+d)x^2+(2a-b)x+2b$

Koeffizienten von x^3: $a+c=0$ (6)

Koeffizienten von x^2: $-a+b+d=1$ (7)

Koeffizienten von x: $2a-b=-6$ (8)

Absolutglieder: $2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$

b in (8): $2a-4=-6 \Rightarrow 2a=-2 \Leftrightarrow \boxed{a=-1}$

a in (6): $-1+c=0 \Rightarrow \boxed{c=1}$

a und b in (7): $1+4+d=1 \Rightarrow \boxed{d=-4}$

Ergebnis: $$\frac{x^2-6x+8}{x^2\left(x^2-x+2\right)}=-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{x-4}{x^2-x+2}$$

Integration:

$$A=\int_2^4\frac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}dx=4\int_2^4\frac{x^2-6x+8}{x^2\left(x^2-x+2\right)}dx=4\int_2^4\left(-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{x-4}{x^2-x+2}\right)dx$$

Teilintegrale:

$$A_1=\int_2^4\tfrac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_2^4=\ln4-\ln2=\ln\tfrac{4}{2}=\ln2$$

$$A_2=\int_2^4\frac{4}{x^2}dx=4\cdot\int_2^4x^{-2}dx=4\cdot\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{4}{x}\right]_2^4=-\frac{4}{4}+\frac{4}{2}=-1+2=1$$

$$A_3=\int_2^4\frac{x-4}{x^2-x+2}dx=\int_2^4\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-8)}{x^2-x+2}dx=\tfrac{1}{2}\cdot\int_2^4\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}-\frac{7}{x^2-x+2}\right)dx$$

Im Zähler wurde 2x-1 benötigt als Ableitung des Nenners. Daher wurde $\frac{1}{2}$ ausgeklammert und dann -8 als -1 – 7 geschrieben.

$$A_{3a}=\int_2^4\frac{2x-1}{x^2-x+2}dx$$

Substitution: $u=x^2-x+2 \Rightarrow du=(2x-1)\cdot dx$

Grenzen: $x=2 \Rightarrow u=4,\ x=4 \Rightarrow u=14$

$$=\int_4^{14}\frac{du}{u}=\left[\ln|u|\right]_4^{14}=\ln14-\ln4=\ln\tfrac{14}{4}=\ln\tfrac{7}{2}$$

$$A_{3b}=\int_2^4\left(\frac{7}{x^2-x+2}\right)dx$$ wird nun durch quadratische Ergänzung und Substitution auf die Form $\int\frac{1}{z^2+1}dz$ gebracht die dann zu arctan(z) führt:

1. Schritt: Quadratische Ergänzung im Nenner:

Das erste Ziel ist: Nenner = $x^2 - x + q = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + ??$.

Das zu ergänzende Quadrat ist $q = \frac{1}{4}$. Es wird zum Ausgleich wieder subtrahiert:

$$\text{Nenner} = x^2 - x + 2 = \boxed{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{4} + 2 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4}$$

2. Schritt: Um das Ziel $z^2 \boxed{+1}$ im Nenner zu erreichen, wird im Nenner $\frac{7}{4}$ ausgeklammert:

$$\frac{7}{x^2 - x + 2} = \frac{7}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{7}{\frac{7}{4} \cdot \left[\frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \overset{\text{Ziel:}}{=} \boxed{4 \cdot \frac{1}{z^2 + 1}}$$

Jetzt folgt eine Substitution. Ihr Ziel ist $\frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = z^2$:

Daher setzt man $z = \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow dz = \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot dx \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot dz = \frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot dz$.

$$A_{3b} = \int_2^4 \left(\frac{7}{x^2 - x + 2}\right) dx = 4 \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2 + 1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7} \cdot dz\right) = 2\sqrt{7} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = 2\sqrt{7} \cdot \left[\arctan(z)\right]_{z_1}^{z_2}$$

Nun fehlen nur noch die z-Grenzen: $x_1 = 2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$x_2 = 4 \Rightarrow z_2 = \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \frac{7}{2} = \sqrt{7}$

Damit erhält man endlich:

$$A_{3b} = 2\sqrt{7} \cdot \left(\arctan\sqrt{7} - \arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right) \approx 1{,}91$$

Zusammensetzen:

$$A = 4 \cdot \left[-A_1 + A_2 + \tfrac{1}{2}A_{3a} - \tfrac{1}{2}A_{3b}\right]$$

$$A = 4 \cdot \left[-\ln 2 + 1 + \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{7} \cdot \left(\arctan\sqrt{7} - \arctan\tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)\right] \approx 0{,}0914$$

Hinweis:

Um sicher zu gehen, dass nicht irgendwo ein Fehler steckt, habe ich mit CASIO ClassPad CAS zuerst das Zielintegral berechnet. Der Betrag davon ist der gesuchte Flächeninhalt.

Dann folgen die vier Teilintegrale und am Ende deren Zusammensetzung zum Gesamtintegral.

$\int_2^4 \frac{4x^2-24x+32}{x^4-x^3+2x^2}dx$

-0.09141295266

$\int_2^4 \frac{1}{x}dx \Rightarrow a1$

$\ln(2)$

$\int_2^4 \frac{4}{x^2}dx \Rightarrow a2$

1

$\int_2^4 \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx \Rightarrow a3a$

$\ln(7)-\ln(2)$

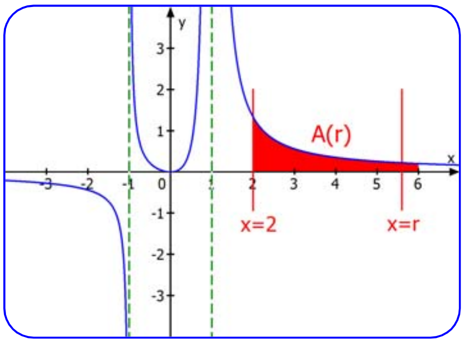
$\int_2^4 \frac{7}{x^2-x+2}dx \Rightarrow a3b$

1.912175084

$4(-a1+a2+a3a/2-a3b/2)$

-0.09141295266

Aufgabe 12



Gegeben ist f durch $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - x^2 + x + 1}$

Das Schaubild K von f begrenzt zusammen mit der x-Achse und den Geraden x = 2 und x = r (r > 2) eine Fläche.

Berechne ihren Inhalt A(r) und stelle fest, ob $\lim\limits_{r\to\infty} A(r)$ einen endlichen Wert hat.

Lösung:

Gesucht ist $A(r) = \int\limits_2^r \dfrac{x^2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

Methode: Man muss den Bruch durch Partialbruchzerlegung aufspalten. Dazu benötigt man die Nullstellen des Nenners, damit man diesen faktorisieren kann.

Eine Probierlösung der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ ist $x_1 = 1$.

Nun kann man den Linearfaktor (x-1) aus dem Nennerterm ausklammern. Dies macht man mit

Horner-Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ x=1 & \boxed{0} & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

oder Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) : (x-1) = x^2 - 1 \\ -\left(x^3 - x^2\right) \\ \hline \qquad\quad -x + 1 \\ \qquad\; -(-x+1) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Ergebnis: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)\cdot\left(x^2 - 1\right) = (x-1)\cdot(x-1)(x+1) = (x-1)^2\cdot(x+1)$

Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \qquad \mid \cdot (x-1)^2(x+1)$$

$$x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2$$

$$x^2 = a\left(x^2 - 1\right) + b(x+1) + c(x-1)^2 \qquad (*)$$

Bestimmung der Koeffizienten a, b und c durch

1. das Einsetzungsverfahren:

$x = 1$	liefert	$1 = 2b$	$\Rightarrow\ b = \frac{1}{2}$
$x = -1$	liefert	$1 = 4c$	$\Rightarrow\ c = \frac{1}{4}$
$x = 0$	liefert	$0 = -a + b + c$	$\Rightarrow\ a = b + c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2. **Koeffizientenvergleich:**

Aus (*) folgt: $x^2 = (a+c)x^2 + (b-2c)x + (-a+b+c)$

Koeffizienten von x^2: $a+c=1$ (1)

$b-2c=0$ (2)

$-a+b+c=0$ (3)

(1) + (3) liefert $b+2c=1$ (4)

(2) + (4) liefert $2b=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$

b in (2): $\frac{1}{2}-2c=0 \Rightarrow 2c=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{4}}$

c in (1): $a+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}}$

Ergebnis:
$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1}$$

Flächenberechnung:

$$A(r) = \int_2^r \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \int_2^r \left(\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \right) dx$$

Teilintegrale:

$$A_1(r) = \frac{3}{4}\int_2^r \frac{1}{x-1}dx = \frac{3}{4}\cdot\left[\ln|x-1|\right]_2^r = \frac{3}{4}\cdot\ln(r-1) - \frac{3}{4}\cdot\ln 1 = \frac{3}{4}\cdot\ln(r-1)$$

$$A_2(r) = \frac{1}{2}\int_2^r \frac{1}{(x-1)^2}dx \qquad \text{Substitution:} \qquad u = x-1 \Rightarrow dx = du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_1^{r-1} u^{-2}du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_1^{r-1} = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{r-1} = \left[-\frac{1}{2u}\right]_1^{r-1} = -\frac{1}{2(r-1)} + \frac{1}{2}$$

$$A_3(r) = \frac{1}{4}\int_2^r \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{4}\cdot\left[\ln|x+1|\right]_2^r = \frac{1}{4}\cdot\ln(r+1) - \frac{1}{4}\cdot\ln 3 = \frac{1}{4}\cdot\ln(r-1) - \frac{1}{4}\cdot\ln 3$$

Zusammengesetzt:

$$A(r) = \frac{3}{4}\cdot\ln(r-1) - \frac{1}{2(r-1)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\ln(r-1) - \frac{1}{4}\cdot\ln 3$$

Ergebnis: $$A(r) = \ln(r-1) - \frac{1}{2(r-1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\ln 3$$

Für $r \to \infty$ geht $\ln(r-1) \to \infty$. $\frac{1}{2(r-1)} \to 0$ und damit $A(r) \to \infty$.

Die Fläche hat für $r \to \infty$ also keinen endlichen Inhalt.

Aufgabe 13 $\int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^4 - x^3 - 6x^2}\,dx$

Faktorisierung des Nenners: $x^4 - x^3 - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(x^2 - x - 6\right) = 0$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Also: Nenner = $x^2(x+2)(x-3)$

Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz:

$$\frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{x-3} \qquad | \cdot x^2(x+2)(x-3)$$

$$x^3 - x^2 + 3 = ax(x+2)(x-3) + b(x+2)(x-3) + cx^2(x-3) + dx^2(x+2) \qquad (*)$$

Bestimmung von a, b c und d durch

1. die Einsetzungsmethode:

$x = 0$ liefert $3 = -6b \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -\frac{1}{2}}$

$x = -2$ liefert $-9 = -20c \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{9}{20}}$

$x = 3$ liefert $21 = 45d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}}$

$x = 1$ liefert $3 = -6a - 6b - 2c + 3d$

also $6a = 6b - 2c + 3d - 3 = 3 - \frac{9}{10} + \frac{7}{5} - 3 = \frac{14-9}{10} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{1}{12}}$

2. Koeffizientenvergleich: Aus (*) folgt:

$$x^3 - x^2 + 3 = a\left(x^3 - x^2 - 6x\right) + b\left(x^2 - x - 6\right) + c\left(x^3 - 3x^2\right) + d\left(x^3 + 2x^2\right)$$

also $x^3 - x^2 + 3 = (a + c + d)x^3 + (-a + b - 3c + 2d)x^2 + (-6a - b)x - 6b$

Koeffizienten von x^3: $a + c + d = 1$ (1)

Koeffizienten von x^2: $-a + b - 3c + 2d = -1$ (2)

Koeffizienten von x: $-6a - b = 0$ (3)

Absolutglieder: $-6b = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -\frac{1}{2}}$

b in (3): $-6a + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{1}{12}}$

a und b in (2): $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2} - 3c + 2d = -1 \quad | \cdot 12$

$-1 - 6 - 36c + 24d = -12 \quad$ bzw. $\quad -36c + 24d = -5$ (4)

a in (1): $\frac{1}{12} + c + d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c + d = \frac{11}{12} \quad \Leftrightarrow \quad 12c + 12d = 11$ (5)

$(4) + 3 \cdot (5)$: $60d = 28 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}}$

d in (5): $c + \frac{7}{15} = \frac{11}{12} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{11}{12} - \frac{7}{15} = \frac{55-28}{60} = \frac{27}{60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{9}{20}}$

Ergebnis: $$\frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{1}{12}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{9}{20}}{x+2} + \frac{\frac{7}{15}}{x-3}$$

Berechnung der Stammfunktion:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^4 - x^3 - 6x^2} dx = \tfrac{1}{12}\int \frac{1}{x} dx - \tfrac{1}{2}\int x^{-2} dx + \tfrac{9}{20}\int \frac{1}{x+2} dx + \tfrac{7}{15}\int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \tfrac{1}{12} \cdot \ln|x| - \tfrac{1}{2} \cdot \left[-\tfrac{1}{x}\right] + \tfrac{9}{20} \cdot \ln|x+2| + \tfrac{7}{15} \cdot \ln|x-3| + C$$

$$= \tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{12} \cdot \ln|x| + \tfrac{9}{20} \cdot \ln|x+2| + \tfrac{7}{15} \cdot \ln|x-3| + C$$